

Symulacja serii przyrostów radialnych jodły *Abies alba* Mill. z wykorzystaniem modeli gamma

Rafał Podlaski

Abstrakt. Celem pracy jest wyodrębnienie modeli rozkładów przyrostów radialnych z wysokości pierśnicy jodły *Abies alba* Mill. oraz ocena przydatności modeli gamma do aproksymacji empirycznych rozkładów przyrostów i do generowania serii przyrostów. W leśnictwach Święta Katarzyna i Święty Krzyż w Świętokrzyskim Parku Narodowym wybrano losowo stosując schemat losowania indywidualnego nieograniczonego 30 jodeł w wieku powyżej 160 lat. Do aproksymacji rozkładów przyrostów radialnych zastosowano pojedynczy rozkład gamma i rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych gamma. W celu symulacji serii przyrostowych zaproponowano algorytm bazujący na modelach gamma. Wyodrębniono jednomodalne (dla 20 drzew) i dwumodalne (dla 10 drzew) rozkłady przyrostów radialnych jodły. Dane najbardziej zbliżone do empirycznych otrzymano dla współczynnika skali równego 2 w metodzie Metropolisa-Hastingsa.

Słowa kluczowe: przyrost promienia, rozkład gamma, generowanie przyrostów, Świętokrzyski Park Narodowy

Abstract. Simulation of radial increment series of *Abies alba* Mill. using gamma models. The objective of this study is to determine the models of radial increment (from breast height) distributions of fir *Abies alba* Mill. as well as to assess the usefulness of gamma models to approximation of empirical increment distributions and to generate increment series. In Święta Katarzyna and Święty Krzyż forest sections in the Świętokrzyski National Park 30 fir trees more than 160 years old were randomly selected using unrestricted simple random sampling. To approximate radial increment distributions of fir, the single gamma distribution and the two-component mixture of gamma distribution were employed. In order to simulate the radial increment series an algorithm based on the gamma models was proposed. The unimodal (for 20 trees) and the bimodal (for 10 trees) distributions of radial increments of fir were determined. The data most similar to the empirical were obtained for the scale factor equal to 2 in the Metropolis-Hastings method.

Keywords: radial increment, gamma distribution, generation of increments, Świętokrzyski National Park

Wstęp

Przyrost grubości drzew jest uzależniony od wielu czynników endogennych i egzogennych. Jednym z głównych czynników kształtujących określony schemat przyrostu grubości danego

drzewa, jest ilość światła, o którą każde drzewo konkuruje ze swoimi sąsiadami z najbliższego otoczenia. Jodła *Abies alba* Mill. jest gatunkiem cieniowyttrzymałym, wzrastającym w drzewostanach o różnej budowie, w różnych warunkach oświetlenia i dlatego wykształca różne schematy przyrostu grubości. Podczas badania układów przyrodniczych z udziałem m. in. przyrostów grubości jodły istnieje konieczność uwzględnienia dużej liczby różnych schematów przyrostu grubości. Spełnienie tego warunku jest bardzo trudne do zrealizowania z powodu m. in. ograniczeń ochronnych i/lub ekonomicznych. Poszerzenie bazy zbiorów danych może być przeprowadzone z wykorzystaniem badań symulacyjnych (Li i in. 2014). Dane symulacyjne są bardzo pomocne podczas walidacji modeli. Symulacje serii przyrostów radialnych są przydatne np. podczas analizy zależności między różnymi cechami biomorfologicznymi korony a przyrostem grubości drzew. Tego typu modele mogą być wykorzystane m. in. do prognozowania rozwoju ekosystemu leśnego.

Celem pracy jest (1) wyodrębnienie modeli rozkładów przyrostów radialnych jodły oraz ocena przydatności modeli gamma do (2) aproksymacji empirycznych rozkładów przyrostów i do (3) generowania serii przyrostów.

Material i metody

Jodły wybrano w leśnictwie Święta Katarzyna i Święty Krzyż, w Świętokrzyskim Parku Narodowym (50°50'–50°53'N, 20°48'–21°05'E). Na terenie objętym badaniami wykształciły się zespoły *Dentario glandulosae–Fagetum*, *Abietetum polonicum* i *Quercu roboris–Pinetum* (Matuszkiewicz 2008). Dominowały drzewostany jedno- i dwugeneracyjne, wielopiętrowe, mieszane z przewagą jodły (drugim pod względem udziału gatunkiem był buk). W obu leśnictwach wybrano łącznie 251 punktów badawczych wykorzystując schemat losowania indywidualnego nieograniczonego w polach siatki Systemu Informacji o Ukształtowaniu Środowiska Przyrodniczego SINUS (szczegóły patrz Podlaski 2005). W otoczeniu wylosowanych punktów badawczych, w promieniu do 100 m (w kilku przypadkach do 200 m), wybrano 40 jodeł w wieku powyżej 160 lat (w pobliżu większości wylosowanych punktów badawczych rosły tylko jodły z młodszych generacji). W 2005 roku badane jodły zostały dwukrotnie nawiercone (od strony stoku i prostopadle do pierwszego odwiertu) świdrem przyrostowym Presslera na wysokości 1,3 m od powierzchni gruntu. Do weryfikacji poprawności pomiaru, synchronizacji czasowej oraz oceny stopnia homogeniczności serii dla badanych jodeł wykorzystano program COFECHA (Grissino-Mayer 2001). Ostatecznie wyselekcjonowano 30 jodeł cechujących się najbardziej zgodnym przebiegiem przyrostów i następnie skonstruowano 30 chronologii uśrednionych z dwóch wywiertów.

Do modelowania rozkładów przyrostów radialnych jodły zastosowano pojedynczy rozkład gamma i rozkład mieszany złożonych z dwóch rozkładów składowych gamma. Funkcja gęstości rozkładu gamma ma następującą postać:

$$f_{(gam)X}(x | \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\beta^\alpha (x - \gamma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta(x-\gamma)} \quad (1)$$

gdzie parametr kształtu $\alpha > 0$ i parametr skalujący $\beta > 0$, x jest większe lub równe od parametru przesunięcia γ ; $\Gamma(\bullet)$ oznacza funkcję gamma.

Funkcję gęstości rozkładu mieszanego gamma, złożonego z dwóch rozkładów składowych (1) można przedstawić jako:

$$f_{(gam)x}(x | \boldsymbol{\psi}) = \pi_1 f_{(gam)1}(x | \boldsymbol{\theta}_1) + \pi_2 f_{(gam)2}(x | \boldsymbol{\theta}_2) \quad (2)$$

gdzie π_1 , π_2 są to odpowiednio wagi (frakcje) rozkładów składowych; $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ oznaczają wektory parametrów dla rozkładów składowych; $\boldsymbol{\psi}$ jest to zestaw wszystkich parametrów danego rozkładu mieszanego.

Do obliczenia parametrów rozkładów mieszanych zastosowano metodę największej wiarygodności (MLE), bazującą na algorytmie EM połączonym z metodą Newtona (Böhning 2000, Podlaski 2011). Do oceny zgodności dopasowania rozkładów teoretycznych do rozkładów rzeczywistych wykorzystano test chi-kwadrat (Reynolds i in. 1988). Obliczenia przeprowadzono m. in. przy pomocy pakietu *mixdist*, wchodzącego w skład środowiska R (Macdonald, Du 2004, R Development Core Team 2015).

W celu symulacji serii przyrostowych zaproponowano następujący algorytm: krok 1. – aproksymacja empirycznego rozkładu przyrostów danej jodły za pomocą modelu gamma, krok 2. – wygenerowanie próby symulacyjnej przyrostów z modelu utworzonego w kroku 1. z wykorzystaniem metody Metropolisa-Hastingsa (generowany ciąg zmiennych losowych jest jednorodnym łańcuchem Markowa), krok 3. – posortowanie rosnące serii wzorcowej i wygenerowanej oraz ich sparowanie, krok 4. – posortowanie rosnące według roku kalendarzowego serii przyrostów. W metodzie Metropolisa-Hastingsa wykorzystano normalny rozkład losowań kandydackich i współczynnik skali równy 1, 2 oraz 3.

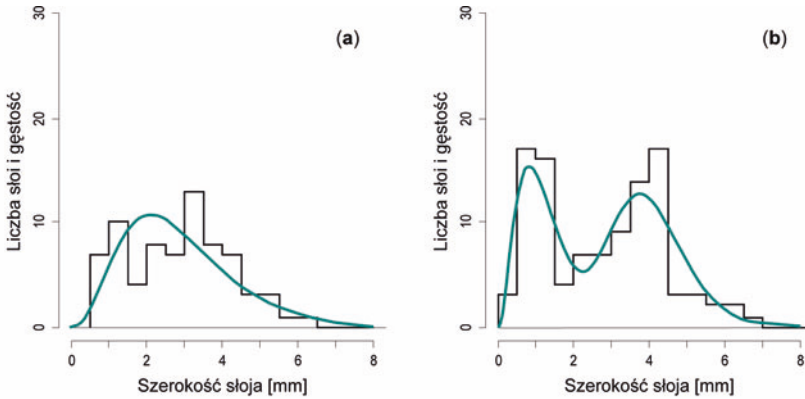
Wyniki i dyskusja

Badane jodły charakteryzowały się na ogół maksimum przyrostowym w latach 1950-1960, a następnie (1) najpierw stopniowo zmniejszającym się, a następnie od ok. 1970 roku zwiększającym się przyrostem lub (2) malejącym przebiegiem przyrostu promienia pierśnicy. Tego typu schematy przyrostu grubości jodły są często spotykane w drzewostanach o złożonej budowie, w których drzewa rosną w zmieniających się warunkach świetlnych (Pividori 1991, Pretzsch 1996).

Wyodrębniono jednomodalne (dla 20 drzew) i dwumodalne (dla 10 drzew) rozkłady przyrostów radialnych jodły (Ryc. 1). Pojedynczy rozkład gamma i rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych gamma pozwoliły na precyzyjną aproksymację badanych przyrostów radialnych (Ryc. 1). Test chi-kwadrat wykazał, że zastosowane rozkłady teoretyczne poprawnie aproksymowały dane empiryczne ($p > 0,05$). Model mieszany ma dużo większe możliwości w porównaniu do pojedynczego rozkładu gamma, ponieważ precyzyjnie aproksymuje nie tylko rozkłady silnie asymetryczne, ale również posiadające dwa ekstrema (Zhang i in. 2001, Liu i in. 2002).

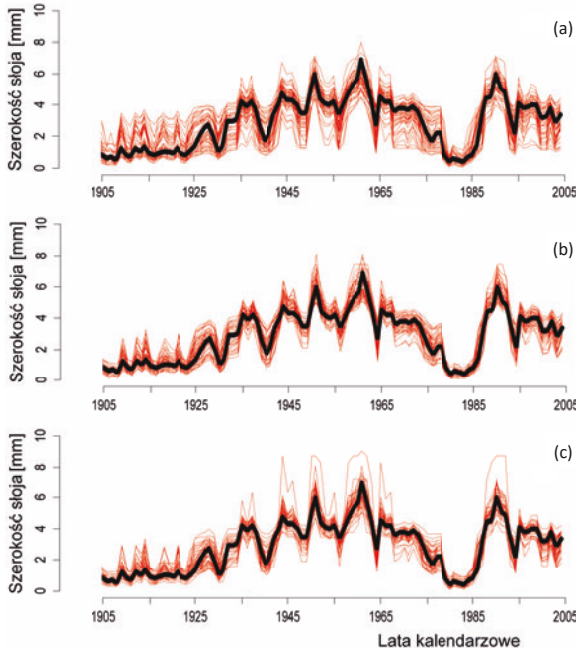
Podczas symulacji przyrostów radialnych jodły dane najbardziej zbliżone do rzeczywistych otrzymano dla współczynnika skali wynoszącego 2 w metodzie Metropolisa-Hastingsa (Ryc. 2). Dla mniejszych i większych wartości współczynnika skali dane wygenerowane są bardziej „rozrzucone” wokół przyrostu rzeczywistego. Zastosowanie określonego współczynnika skali uwarunkowane jest požądanymi dla danego zadania (najczęściej walidacji) właściwościami danych przyrostowych. Symulacje serii przyrostów radialnych, otrzymywane przy użyciu róż-

nych algorytmów, są coraz częściej wykorzystywane w naukach przyrodniczych (Bunn i in. 2004, Clark i in. 2007, Li i in. 2014, Holmström i in. 2015).



Ryc. 1. Jednomodalny (Ryc. 1a – jodła JdO032) i dwumodalny (Ryc. 1b – jodła JdO020) rozkład przyrostów radialnych z wysokości piersnicy jodły; zastosowano pojedynczy i mieszany model gamma; rozkłady rzeczywiste – czarna łamana, modele teoretyczne – niebieska linia ciągła

Fig. 1. The unimodal (fig. 1a – fir tree JdO032) and the bimodal (fig. 1b – fir tree JdO020) distribution of radial increments (from breast height) of fir; single and mixture gamma models were used; empirical distributions – black polyline, theoretical models – blue solid line



Ryc. 2. Rzeczywiste (linia czarna) i wygenerowane (50 czerwonych serii) przyrosty radialne (z wysokości piersnicy) jodły JdO020 przy wartości współczynnika skali w metodzie Metropolis-Hastingsa równej 1 (a), 2 (b) i 3 (c)

Fig. 2. Empirical (black line) and generated (50 red series) radial increments (from breast height) of fir tree JdO020 for the scale factor in the Metropolis-Hastings method equal to 1 (a), 2 (b) or 3 (c)

Wnioski

- Do symulacji serii przyrostowych jodeł cechujących się różnymi schematami przyrostu promienia pierścicy można wykorzystać zaproponowany algorytm, bazujący na modelach gamma.
- Wielkości przyrostów najbardziej zbliżone do wzorcowych otrzymano dla współczynnika skali równego 2 w metodzie Metropolis–Hastingsa.

Literatura

- Böhning D. 2000. Computer-Assisted Analysis of Mixtures and Applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Bunn A. G., Sharac T. J., Graumlich L. J. 2004. Using a simulation model to compare methods of tree-ring detrending and to investigate the detectability of low-frequency signals. *Tree-Ring Res.* 60: 77-90.
- Clark J. S., Wolosin M., Dietze M., Ibáñez I., LaDeau S., Welsh M., Kloeppel B. 2007. Tree growth inference and prediction from diameter censuses and ring widths. *Ecol. Appl.* 17: 1942-1953.
- Grissino-Mayer H. D. 2001. Evaluating crossdating accuracy: A manual and tutorial for the computer program COFECHA. *Tree-Ring Res.* 57: 205-221.
- Holmström L., Ilvonen L., Seppä H., Veski S. 2015. A Bayesian spatiotemporal model for reconstructing climate from multiple pollen records. *Ann. Appl. Stat.* 9: 1194-1225.
- Li G., Harrison S. P., Prentice I. C., Falster D. 2014. Simulation of tree-ring widths with a model for primary production, carbon allocation, and growth. *Biogeosciences* 11: 6711-6724.
- Liu C., Zhang L., Davis C. J., Solomon D. S., Gove J. H. 2002. A finite mixture model for characterizing the diameter distribution of mixed species forest stands. *For. Sci.* 48: 653-661.
- Macdonald P. D. M. przy współpracy Du J. 2004. *mixdist: Mixture Distribution Models*. R package version 0.5-1. <http://www.r-project.org>, <http://www.math.mcmaster.ca/peter/mix/mix.html>.
- Matuszkiewicz J. M. 2008. *Zespoły leśne Polski*. PWN, Warszawa.
- Pividori M. 1991. Analisi degli incrementi e delle chiome in alcune stazioni di abete bianco (*Abies alba* Miller) del piano montano in Piemonte (Italia). *Dendroch.* 9: 143-164.
- Podlaski R., 2005. Inventory of the degree of tree defoliation in small areas. *For. Ecol. Manage.* 215: 361-377.
- Podlaski R., 2011. Modelowanie rozkładów pierścic drzew z wykorzystaniem rozkładów mieszanych I. Definicja, charakterystyka i estymacja parametrów rozkładów mieszanych. *Sylwan* 155 (4): 244-252.
- Pretzsch H. 1996. Growth trends of forests in Southern Germany. W: Spiecker H., Mielikäinen K., Köhl M., Skovsgaard J.P. (red) *Growth Trends in European Forests*. Berlin, Springer: 107-132.
- R Development Core Team 2015. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>
- Reynolds M. R., Burk T., Huang W-H. 1988. Goodness-of-fit tests and model selection procedures for diameter distribution models. *For. Sci.* 34: 373-399.
- Zhang L., Gove J. H., Liu C., Leak W. B. 2001. A finite mixture distribution for modeling the diameter distribution of rotated–sigmoid, uneven–aged stands. *Can. J. For. Res.* 31: 1654-1659.

Rafał Podlaski

Zakład Ochrony Przyrody i Fizjologii Roślin; Uniwersytet Jana Kochanowskiego
r_podlaski@pro.onet.pl